Bessel Function

Lec 23

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - K^2) y = 0 \longrightarrow (1)$$

the sol. of eqn

$$J_K(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+K}}{r!\,\Gamma(r+K+1)} \longrightarrow (2)$$

$(K_1 - K_2) \longrightarrow$ non integer

فإن حل المعادلة يكون

$$y_{G.S} = C_1 J_K(x) + C_2 \cancel{J_K(x)}\, J_{-K}(x)$$

$K_1 - K_2$ integer

الحل يكون

$$y_{G.S} = C_1 J + C_2 Y_K(x)$$

$$Y_K = \lim_{n \to K} \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}}{\sin n\pi}$$

$\boxed{EX}$ solve by series solution

(1) $x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{16}{25}\right) \cdot y = 0$

(2) $x^2 y'' + x y' + (x^2 - 9) y = 0$

Sol

(1) $K^2 = \frac{16}{25}$; $K = \pm \frac{4}{5}$

$K_1 - K_2 \rightarrow$ non integer and eqn is Bessel eqn.

$$y_{G.S} = C_1 J_{\frac{4}{5}}(x) + C_2 J_{-\frac{4}{5}}(x)$$

$$J_{\frac{4}{5}}(x) = \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r + \frac{4}{5}}}{r! \, \Gamma\left(r + \frac{9}{5}\right)}$$

---

2) the eqn is Bessel fn.

$K_1 = 3$, $K_2 = -3$, $K_1 - K_2$ integer

$$y_{G.S} = C_1 J_3(x) + C_2 Y_3(x)$$

$$J_3(x) = \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+3}}{r! \, \Gamma(r+4)}$$

$$Y_3(x) = \lim_{n \to 3} \frac{J_n(x)\cos(n\pi) - J_n(x)}{\sin(n\pi)}$$

Ex: Prove that

$$J_{-K}(x) = (-1)^K J_K(x)$$

$$J_{-K}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-K}}{r!\,\Gamma(r-K+1)}$$

$$= \sum_{r=0}^{K-1} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-K}}{r!\,\Gamma(r-K+1)} + \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-K}}{r!\,\Gamma(r-K+1)}$$

Γ (أي عدد سالب) $\Rightarrow -\infty$ وحيث $\Gamma(r-K+1)$ تساوي

$(r-K)!$ فإن قيمة المقام في الحد الأول تعطي دائماً $-\infty$

أي أن أول متسلسلة = صفر.

$$\Gamma(r-K+1) = (r-K)!$$

والتجميع على m

Let $m = r - K \Rightarrow r = m + K$

$$J_{-K}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (-1)^K \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2K-K}}{(m+K)!\,\Gamma(m+K-K+1)}$$

$$= (-1)^K \sum \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+K}}{\Gamma(m+K+1)\; m!}$$

$$J_{-K}(x) = (-1)^K J_K(x) \quad \#$$

→ show that

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$J_{\frac{-1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

— من رأس المسألة نستنتج أن $J_{\frac{1}{2}}$ تأخذ معظم خواص ال (sin) ، و $J_{\frac{-1}{2}}$ تأخذ معظم خواص ال (cos)

من ذلك بين كل صفرين ل $J_{\frac{1}{2}}$ يوجد صفر ل $J_{\frac{-1}{2}}$ والعكس بالعكس والدالتين لهما تردد و يؤولا للصفر عند $X = \infty$.

الحل

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\frac{1}{2}}}{r!\, \Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^0 \quad \sqrt{x}}{\sqrt{2}\,(1)\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} + \frac{\cancel{2}(-1)^1 \; x^2 \sqrt{x}}{\cancel{2}\sqrt{2}\;(1)\,(3)(1)\sqrt{\pi}} + \cdots$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$ * ~~[illegible]~~ نضرب: الحدانه

$$\cancel{\sqrt{\frac{2}{\pi x}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[x - \frac{x^3}{3!} \cdots \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} * \sin x$$

b)

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r - \frac{1}{2}}}{r!\;\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^0 \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{(1)\;\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{(-1)^1 \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{1!\;\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{x}} - \frac{x^2\sqrt{x}}{\cancel{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \cdots$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots \right]$$

$$\therefore\ J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \cos x$$

Generating Function

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

← الدالة المولدة لدالة (Bessel) معناها أنه يمكن استنتاج دالة (Bessel) من مفكوك الدالة الأسية.

Ex: show that

$$\frac{d}{dx}\left(x^K J_K\right) = x^K\ J_{K-1}(x)$$

$\boxed{\text{Sol}}$

$$J_K = \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+K}}{r!\ \Gamma(K+r+1)}$$

$$x^K J_K = \sum \frac{(-1)^r\ (x)^{2r+2K}}{2^{2r+K}\ r!\ (K+r)!}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^K J_K\right) = \sum \frac{(-1)^r\ 2(r+K)\ x^{2r+2K-1}}{2^{r+K}\ r!\ \underbrace{(\cancel{K+r})!}_{(K+r-1)!}}$$

$$= x^{K} \sum \frac{(-1)^{r} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+(K-1)}}{r! \, \Gamma(r+(K-1)+1)}$$

$$= x^{K} J_{K-1}(x).$$

هـ نستخدم هذه الخاصية في مسائل التكامل لو كان اللي
جوه x سابقه ما تحت الـ J بـ (1) نجعلهم زي بعض
بس عليهم تفاضل يعني لو ظهر الطرف الأيمن في المسألة
نفكر في طريقة تجعل التفاضل يلغي التكامل.

EX: show that

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-K} J_{K}\right) = -x^{-K} J_{K+1}$$

$$x^{-K} J_{K} = x^{-K} \sum \frac{(-1)^{r} x^{(2r+K)}}{2^{2r+K} \, r! \, \Gamma(K+r+1)}$$

$$= \sum \frac{(-1)^{r}}{2^{2r+K} \, r!} \frac{x^{2r}}{\Gamma(r+K+1)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-K} J_K\right) = \sum \frac{(-1)^r \, 2r \, x^{2r-1}}{2^{2r+K} \, r! \, \Gamma(r+K+1)}$$

ـــه عايزين نطلع الطرف اليمين (عايز في الختام مضروب رمز) مثل مضروب ب r في J_K .

$$m = r-1 \Rightarrow r = m+1$$

$$(-1)^1 \sum \frac{(-1)^m \, x^{2m+1}}{2^{2m+K+1} \, m! \, \Gamma(m+K+2)}$$

$$= -x^{-K} \sum \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+(K+1)}}{m! \, \Gamma(m+(K+1)+1}$$

$$= -x^{-K} J_{K+1}(x)$$

$\boxed{8}$ Lec 23